第５講　総合演習①

1

以下の文章を読み，(ア)〜(オ)と(ク)，(ケ)については適当な式，(カ)，(キ)，(コ)と(シ)については適当な数値を入れよ。このうち，(コ)，(シ)については有効数字２桁で答えること。また，(サ)には適当な記号を入れよ。必要であれば，$1\,\mathrm{eV}=1.60\times10^{-19}\mathrm{J}$，プランク定数 $h=6.63\times10^{-34}\mathrm{J\cdot s}$，光の速さ $c=3.00\times10^{8}\mathrm{m/s}$ を用いよ。

(1)　水素原子から放出される光の線スペクトルの波長 λ は，

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{l^2}\right)\quad (n,\ l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ ただし，n<l)\quad \cdots①$$

に従う。ここで R はリュードベリ定数と呼ばれ，その値は $1.10\times10^{7}\mathrm{m^{-1}}$ である。

線スペクトルの波長が①式のように表される理由をボーアの原子模型に従って考えてみよう。原子核は電子に比べてじゅうぶんに重く中心に静止しているものとする。いま，電荷 $+e$ を持つ水素原子核の周りを電荷 $-e$ と質量 m を持つ電子が半径 r の円軌道を速さ v でまわっているとする。このとき，原子核と電子の間に働く静電気力の大きさは k_0 を定数として $k_0\dfrac{e^2}{r^2}$ と書ける。また，円運動の加速度の大きさは $\dfrac{v^2}{r}$ と書けるので，電子の運動方程式は，m，v，r，e，k_0 を用いて［(ア)］…②となる。一方，電子を波と考えると，その波長 λ_e（ド・ブロイ波長）は，プランク定数 h を用いて $\lambda_e=\dfrac{h}{mv}$…③と書けるが，電子の波は軌道の円周の長さが波長 λ_e の整数倍，すなわち $2\pi r=n\lambda_e$…④のときのみ定常波として存在することができる。この正の整数 n は量子数と呼ばれる。②，③，④式から v を消去すると，量子数 n の定常状態における電子の軌道半径 r_n は，m，e，k_0，h，n を用いて $r_n=$［(イ)］…⑤と書ける。また，この量子数 n の定常状態におけるエネルギー E_n は，電子の運動エネルギーと静電気力による位置エネルギーの和と考えられるので，m，e，k_0，h，n を用いて $E_n=$［(ウ)］…⑥となる。電子がエネルギー E_l の定常状態からエネルギー E_n の定常状態に落ちる時に放出される光の波長 λ は，E_l，E_n，h，c を用いて $\lambda=$［(エ)］…⑦と表せる。したがって，①，⑥，⑦式より，R は，m，e，k_0，h，c を用いて $R=$［(オ)］…⑧となることがわかる。また，①式の線スペクトルは，n の値によって決まるいくつかの系列に分かれる。各系列の波長の最小値 $\lambda_{\min}$ と最大値 $\lambda_{\max}$ は，

$$\lambda_{\min}=\frac{n^2}{R}\cdots⑨,\quad \lambda_{\max}=\frac{1}{R}\times\frac{1}{\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}}\cdots⑩$$

と書くことができる。

(2)　実際に，水素原子から放出される光を分光器で観測したところ，図１のような線スペクトルが得られた。分光器の測定可能な波長領域は $3.00\times10^{-7}\mathrm{m}$ から $7.00\times10^{-7}\mathrm{m}$ である。

＜ Note ＞

図中の輝線ｂに対応する①式の（n, l）の値は，（n, l）＝（ (カ) , (キ) ）と推定される。

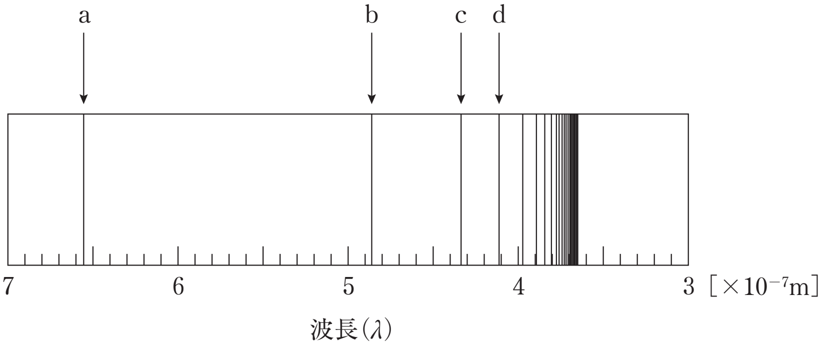


図１

(3) 次に，図２のような光電管の陰極と陽極の間に適当な電圧をかけ，水素原子の放出する光を陰極の表面に当ててみたところ，電流が流れた。これは，光電効果によって陰極の表面から電子（光電子）が飛び出して電流（光電流）が流れたものと解釈できる。入射する光の振動数を ν，陰極の仕事関数を W とすると，飛び出した光電子の運動エネルギーの最大値 K_{max} は，h，ν，W を用いて K_{max}＝ (ク) と書ける。また，光の振動数 ν は，c，λ を用いて ν＝ (ケ) と表せる。陰極の仕事関数 W を 2.30eV とすると，波長が (コ) $\times 10^{-7}$m 以上の光は光電効果をおこさない。したがって，図１の線スペクトルのうち (サ) に対応する光は光電流に寄与しないと考えられる。また，陽極に負の電圧（陰極に対する陽極の電位）$-V_A$ をかけ，V_A をじょじょに大きくし V_M にすると，電流が流れなくなった。この限界電圧 V_M は (シ) V である。ただし，波長が 3.00×10^{-7}m 以下の入射光は，光電管のガラスで完全に吸収され，光電管内部へ透過しないものとする。

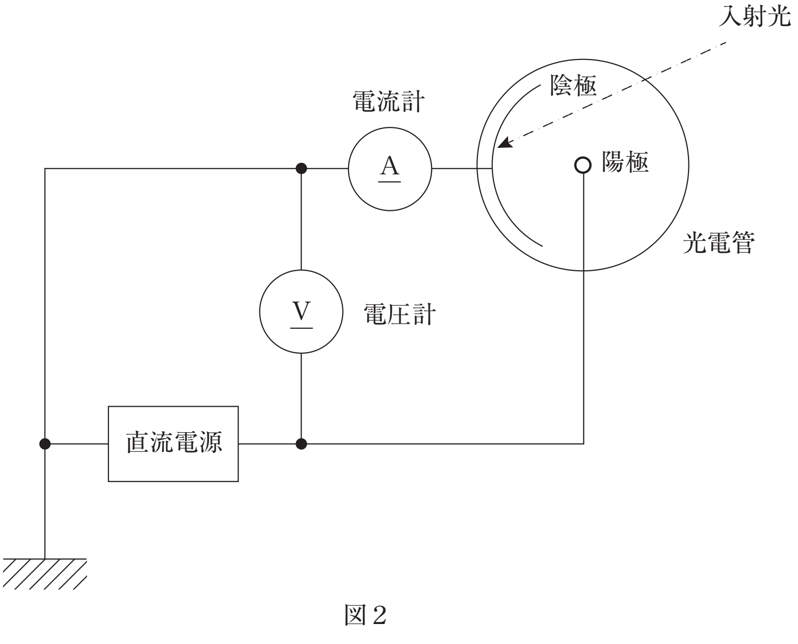


図２

＜ Note ＞

2

質量 m の単原子分子からなる絶対温度 T の理想気体を考え，その分子の平均運動エネルギーを $\frac{1}{2}mv_0{}^2$ と表す。ただし．$v_0=\sqrt{<v^2>}$ であり，$<v^2>$ は分子の速さの二乗平均を表す。このとき平均運動エネルギーと T の間には，k をボルツマン定数として

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2 = \boxed{(ア)} \qquad (1)$$

という関係がある。

気体分子には基底状態（エネルギー E_0）と励起状態（エネルギー E_1）の二つの状態があるとし，基底状態の電子が振動数 f_1 の光を吸収して励起状態に遷移した場合，f_1 は h をプランク定数として

$$E_1 - E_0 = \boxed{(イ)} \qquad (2)$$

という関係式を満たす。励起された電子は極めて短時間後に振動数 f_1 の光を放出して基底状態に戻る。

さて，音波では発音体や受音体が動いている場合，両者ともに静止しているときに比べ，振動数が変化して受け取られる現象が知られている（ドップラー効果)。光の波（速さを c とする）にも同様な効果が存在しており，たとえば振動数 f の光が速さ v を持つ気体分子の運動方向前方から当てられた場合，その光の振動数は音波と同じ式により $f\frac{c+v}{c}$ の振動数の光として受け取られる。したがって，速さ v_0 を持つ分子に f_1 より少し小さい特定の振動数 f_0 の光を運動方向前方から当てれば，ドップラー効果により分子はそれを見かけ上 f_1 の光として吸収し，エネルギー E_0 の状態にいた電子はエネルギー E_1 の状態に励起される。このとき $\boxed{(イ)}$ を f_0 を用いた形で表すと $\boxed{(ウ)}$ となる。一方，光を放出するときはその振動数が f_1 であるので，放出光と吸収光にエネルギー差が生じ，このエネルギー差はエネルギー保存則により分子の運動エネルギーの減少分となる。すなわち，光吸収前に速さ v_0 であった分子と，光放出後に速さ v_1（$<v_0$）になった分子の運動エネルギー差は振動数 f_1 の放出光と振動数 f_0 の吸収光のエネルギー差に等しい。この等式を m，v_0，v_1，f_0，c および h で表すと，$\boxed{(エ)}$ となる。

これを利用すると，分子の運動エネルギーを減らす効果（冷却効果）を得る．厳密には分子の運動方向や速さの分布を正しく考慮する必要があるが，大まかな取り扱いとして $\boxed{(エ)}$ で求められた運動エネルギーの減少をそのまま平均運動エネルギーの減少と考え，さらに分子の平均運動エネルギーと温度の関係を考慮し，光の振動数 f_0 を用いて温度の低下を計算すると，温度は T から

$$T' = \boxed{(オ)} \qquad (3)$$

に下がる。これがレーザー冷却と呼ばれる，気体の冷却方法の原理的な考え方である。

＜ Note ＞

3

光を鏡で反射させたり，プリズムで屈折させたりすると，鏡やプリズムは光から力を受ける。実際，光が及ぼす力を利用し，原子を静止させたり，微粒子を捕捉し移動させるといった実験が行われている。

光が物質に及ぼすことは光の粒子性を用い容易に説明できる。量子論によると，光は，エネルギーE，運動量p（運動量の方向は光の進行方向と同じである）の粒子（光子）の集まりである。光子が運動量を持っていることに着目しよう。反射や屈折によって光が曲がるということは，光子の進行方向が変化することであり，したがって，運動量が変化することになる。気体分子運動論において分子の壁への衝突が気体の圧力を与えるのと同様に，光子の運動量の変化は，反射や屈折を引き起こした物体に対し力積として働くのである。

計算を簡単にするために，問題を２次元（xy面）に限定し，光の進行方向はxy面内にあるとする。さらに，非常に細い光ビームを考え，１本の光線で近似できるとする。光の波動性による回折効果は考えない．光は振動数νの単色光とする。

(1)　振動数νの光子のエネルギーEと運動量の大きさpを表す式を書け。ただし，プランク定数をh，真空中の光速度をcとする。

　また，光のパワー（進行方向に垂直な断面を単位時間当たりに通過するエネルギー）がSのとき，断面を単位時間当たりに通過する光子の数Nを求めよ。

(2)　図１は頂角A，屈折率nのプリズムによって光が曲げられる様子を示したものである。プリズムに入る光線（入射光線）とプリズムから出ていく光線（射出光線）の間の角度を偏角という。入射光線と射出光線が頂角の２等分線に対して対称になるときの偏角Δ，頂角A，屈折率nの間の関係を光の屈折の法則から求めよ。ただし，空気の屈折率は１とする。

　頂角Aが十分小さいときは，偏角Δも小さくなる。このときのΔの近似式を求めよ。ただし，$|x| \ll 1$であればxの１次式までの精度で，$\sin x \fallingdotseq x$，$\cos x \fallingdotseq 1$としてよい。

(3)　次に，プリズムの代わりに，半径R，屈折率nの円柱状の物体による屈折を考える。入射光線をx軸，円柱の軸の方向をz軸にとり，円柱の中心のxyz座標を（0, y, 0）とする。図２に示すように，円柱物体による光線の屈折は，光線の入射点と射出点で円に接するプリズムによる，頂角の２等分線に対して対称な屈折と同じになる。このことを利用し，位置yが半径Rに比べて十分小さいときの偏角$\Delta(y)$を，y/Rの１次までの精度で近似的に求めよ。

(4)　パワーSの光線を，設問(3)の円柱物体に入射させた。円柱の軸の位置yが半径Rに比べ十分小さいとき，物体に働く力のx, y成分を，y/Rの１次までの精度で近似的に求めよ。ただし，物体による光の反射および吸収はないものとする。

(5)　円柱物体が無重力空間に静止していた。設問(4)と同じ条件で光線を入射させたところ，物体はy方向に振動を始めた。その振動数はいくらか。ただし，物体の質量をmとせよ。

＜ Note ＞

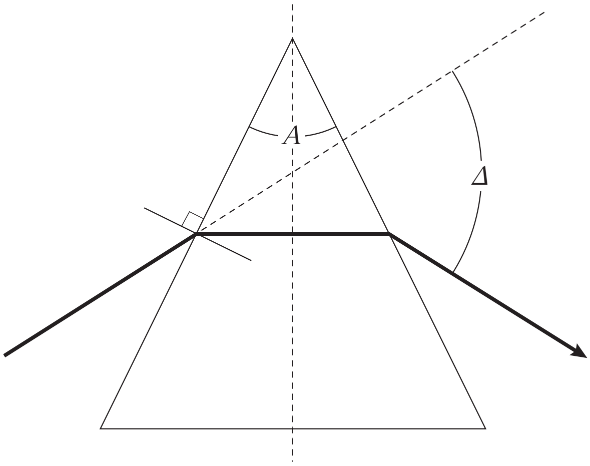


図１

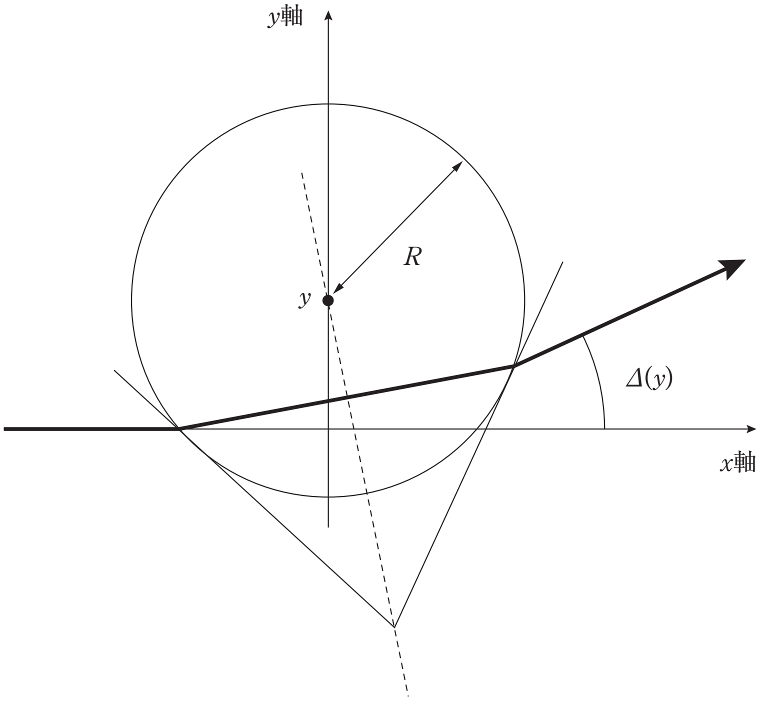


図２

< Note >

第５講　確認テスト

19 世紀末から 20 世紀初め，電荷にはもはやそれ以上細かくできない「基本単位」が存在すると考えられるようになってきた。ミリカンは油滴実験と呼ばれる有名な実験によってこの説を初めて明確に証明し，1923 年のノーベル物理学賞を受賞した。実験の原理は以下にのべるように高校物理の知識で理解できる。以下に適切なものを選択肢より選んで答えよ。

〔１〕

密度 ρ [kg/m^3] の小さい球に働く力を考えよう。球の半径を a [m]，重力加速度の大きさを g [m/s^2] とするならば球に作用する重力の大きさは［(1)］[N] である。空気中を動く物体が速度の逆方向に抵抗力を受けることは経験からもわかる。小さい球の場合，抵抗力の大きさ F は球の半径 a と速さ w [m/s] に比例する事が知られており，ある定数 μ を使って $F=6\pi\mu aw$ [N] と表せる。μ [N･s/m^2] は空気の流れにくさを表す「粘性係数」とよばれる定数でその値はよく知られている。

空気中を落下する小さい球の場合，加速度は抵抗力によってただちに減少し，最終的に球は「終端の速さ」と呼ばれる一定の速さ $W=$［(2)］[m/s] で落下する。逆に見れば，終端の速さ W を測定すれば，直接に測定できない半径が $a=$［(3)］[m] のように実験データから決定できる。

〔２〕

ミリカンは弟子のフレッチャーと次の図１に示すような装置を用いて次のような実験を行った。油を噴霧器から霧のように吹き出して空気中に小さい油滴をたくさん作った。小さい油滴は表面張力のために球になる。油滴には重力と〔１〕で考えたような抵抗力が作用する。〔１〕と同じように，油滴半径を a，密度を ρ としよう。このような球状油滴が落下して図１の距離 D [m] 離れた二枚の水平な電極板にはさまれた空間に入った後，油滴はＸ線で照射され，正又は負に帯電した。この電荷を q [C] としよう。二枚の電極板には電位差 V [V] がかけられ油滴の鉛直方向の運動を顕微鏡で観察する。D が電極板の大きさに比べ十分小さいならば，二枚の電極板の間に作られる電場が油滴に及ぼす力の大きさは［(4)］[N] である。決定したいのは q の大きさであり，そのために様々な方法が考えられる。正確さは欠くが，最も簡単な方法は次のようなものである。まず $V=0$ にして，ゆっくり落下してゆく油滴に目をつける。次に電位差 V を与え，油滴が停止するように電位差を調整する。停止した電位差を V_0 [V] とすると電荷 q [C] は a，ρ，V_0，D 等を使って $q=$［(5)］[C] と表される。一方，油滴の半径は，電位差を $V=0$ にしておいて，〔１〕で述べたように終端の速さ W を測定すれば決定できる。（W は顕微鏡を使って測定できる。）測定できる量によって油滴の電荷を表すと $q=$［(6)］[C] となって q が実験データから計算できる。

何度も q を測定する実験をくり返し，電荷 q とそれが観測された回数を棒グラフで表すと図２が得られた。もし電荷に「基本単位」があれば，q は基本単位の整数倍の値をもつはず

である。この事を考慮するとグラフから電荷の基本単位はおおよそ [(7)] $\times 10^{-20}$C と読み取れる。

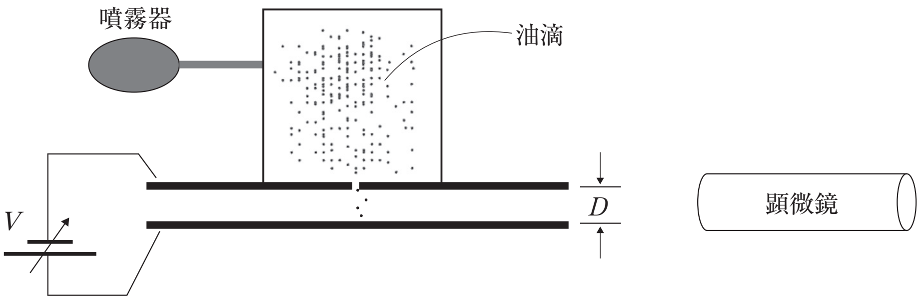


図１

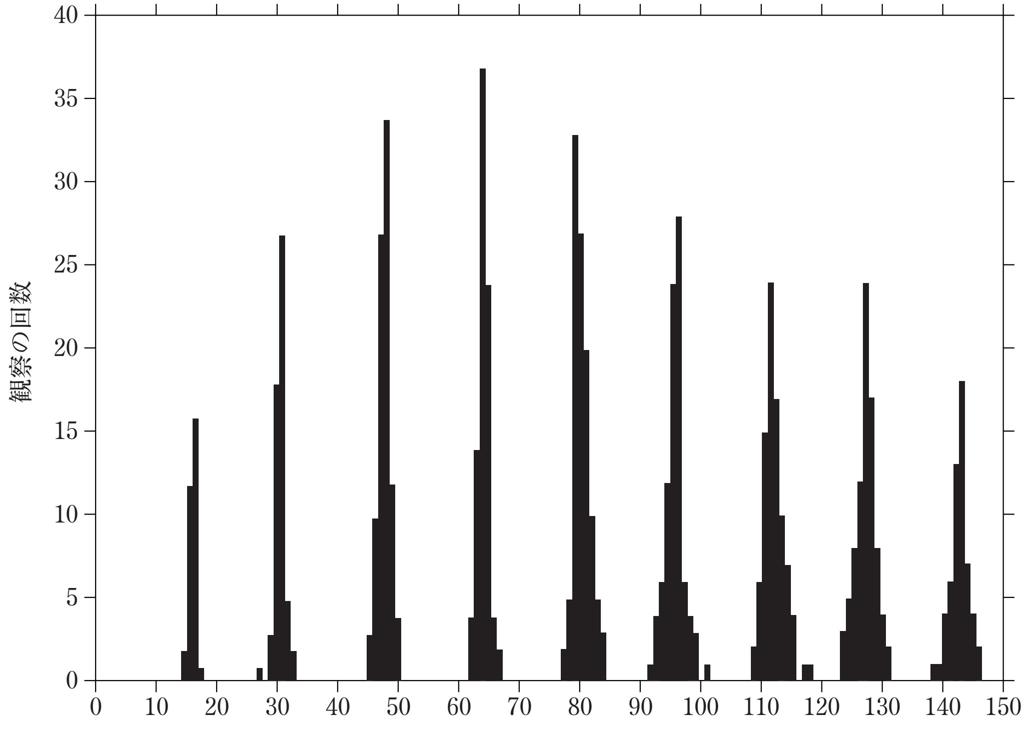


図２

(1) の選択肢

① $4\pi\rho a^2 g$　② $4\pi\rho a^3 g$　③ $\frac{4}{3}\pi\rho a^2 g$　④ $\frac{4}{3}\pi\rho a^3 g$

(2) の選択肢

① $\frac{2\rho a g}{\mu}$　② $\frac{2\rho a^2 g}{9\mu}$　③ $\frac{2\rho a g}{9\mu}$　④ $\frac{2\rho a^2 g}{\mu}$

(3) の選択肢

① $\sqrt{\frac{\mu W}{2\rho g}}$　② $2\sqrt{\frac{\mu W}{3\rho g}}$　③ $\sqrt{\frac{\mu W}{\rho g}}$　④ $3\sqrt{\frac{\mu W}{2\rho g}}$

(4) の選択肢

① $\frac{4}{3}\pi\rho a^3 g$　② $\frac{4}{3}\pi\rho a^2 g$　③ $\frac{qV}{D}$　④ qV

(5) の選択肢

① $\frac{4\pi\rho a^3 gD}{3V_0}$　② $\frac{4\pi\rho a^3 gD}{V_0}$　③ $\frac{D}{V_0}$　④ $\frac{V_0}{D}$

(6) の選択肢

① $\frac{18\pi\mu WD}{V_0}\sqrt{\frac{\mu W}{2\rho g}}$　② $\frac{9\pi\mu WD}{V_0}\sqrt{\frac{\mu W}{2\rho g}}$　③ $\frac{9\pi\mu WD}{V_0}\sqrt{\frac{\mu W}{\rho g}}$

④ $\frac{18\pi\mu WD}{V_0}\sqrt{\frac{\mu W}{\rho g}}$

(7) の選択肢

① 5　② 15　③ 30　④ 140

< Note >

第５講　解答

1

(ア) $m\dfrac{v^2}{r}=k_0\dfrac{e^2}{r^2}$　(イ) $\dfrac{h^2n^2}{4\pi^2k_0e^2m}$　(ウ) $-\dfrac{2\pi^2k_0{}^2e^4m}{h^2n^2}$

(エ) $\dfrac{hc}{E_l-E_n}$　(オ) $\dfrac{2\pi^2k_0{}^2e^4m}{ch^3}$　(カ) 2

(キ) 4　(ク) $h\nu-W$　(ケ) $\dfrac{c}{\lambda}$

(コ) 5.4　(サ) a　(シ) 1.1

2

(ア) $\dfrac{3}{2}kT$　(イ) hf_1　(ウ) $hf_0\dfrac{c+v_0}{c}$　(エ) $\dfrac{hf_0v_0}{c}=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2-\dfrac{1}{2}mv_1{}^2$

(オ) $T-\dfrac{2hf_0v_0}{3kc}$

3

(1) $E=h\nu$　$p=\dfrac{h\nu}{c}$　$N=\dfrac{S}{h\nu}$

(2) $1\cdot\sin\dfrac{A+\Delta}{2}=n\cdot\sin\dfrac{A}{2}$　$\Delta=(n-1)A$

(3) $\Delta=\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{2y}{R}$

(4) x 成分：0　y 成分：$-\dfrac{2S(n-1)}{nc}\cdot\dfrac{y}{R}$

(5) $\dfrac{1}{\pi}\sqrt{\dfrac{(n-1)S}{2mncR}}$

第５講　確認テスト

【解答】

〔１〕 (1) ④　(2) ②　(3) ④

〔２〕 (4) ③　(5) ①　(6) ①　(7) ②

【解説】

〔１〕

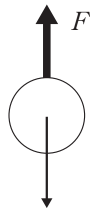
(1) 物体の質量は

$$m=\rho\times\frac{4\pi}{3}a^3$$

なので，重力の大きさは

$$mg=\underline{\frac{4\pi\rho a^3 g}{3}}$$

(2) 図Ａを参照．速さが一定となった後は力のつりあいが成立するので



図A

$$mg=F$$

$$\therefore\ \frac{4\pi\rho a^3 g}{3}=6\pi\mu aW \qquad \therefore\ W=\underline{\frac{2\rho a^2 g}{9\mu}}$$

(3) (2)より，逆に

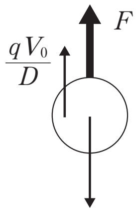
$$a=\sqrt{\frac{9\mu W}{2\rho g}}=\underline{3\sqrt{\frac{\mu W}{2\rho g}}}$$

〔２〕

(4) 極板間の電場の強さは $\frac{V}{D}$ ゆえ，油滴に及ぼす力の大きさは $\underline{q\frac{V}{D}}$

(5) 極板間を通過しているとき，油滴にかかる力は図Ｂのようになるが，油滴が停止した後は抵抗力は０である！

よって，力のつりあいを考えると，



図B

$$\frac{qV_0}{D}=mg$$

$$\therefore\ q=\frac{mgD}{V_0}=\underline{\frac{4\pi\rho a^3 gD}{3V_0}}$$

(6) (5)の結果に，(3)の結果を代入して

$$q=\underline{\frac{18\pi\mu WD}{V_0}\sqrt{\frac{\mu W}{2\rho g}}}$$

(7) グラフのピークは 15×10^{-20} [C]，31×10^{-20} [C]，48×10^{-20} [C]，…となっているので，選択肢から選べば

$\underline{15}$